$\boxed{№6.14}$ $a(\omega) = a_0 \exp\left(-\frac{2(\omega-\omega_0)^2 T_0^2}{(2\pi)^2}\right)$, где ω_0 - несущая частота
T_0 - длительность пакета

при $x=0$, пакет имеет вид:

$$\xi(x=0,t) = a_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2(\omega-\omega_0)^2 T_0^2}{(2\pi)^2}\right) \exp(i\omega t)\, d\omega$$

1) Исследовать дисперсное расплывание пакета в среде в приближении второго порядка теории дисперсии, то есть положив, что

$$K(\omega) = K_0 + \frac{1}{V_{гр}}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial\omega^2}\Big|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^2$$

где $V_{гр}$ и $\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\Big|_{\omega_0}$ известны, $K = \frac{\omega}{V_{фазовая}}$ (волновое число)

2) Найти распр. интенсивности $I(\eta) = \xi(\eta)\,\xi^*(\eta)$ в пакете в зависимости от бегущего времени $\eta = t - \frac{x}{V_{гр}}$ при разн. расст. x.

3) Построить форму пакета для неск. зн. x.

4) Вычислить энергию волн. пакета $W = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\eta)\, d\eta$.

5) Найти зависимость длительности пакета от расстояния x.

$\boxed{1}$ Исследовать дисперсное расплывание. $\boxed{\xi(x,t) = A(x,t)\exp[i(\omega_0 t - K_0 x)]}$

$$a(\omega) = a_0 \exp\left(-\frac{2(\omega-\omega_0)^2 T_0^2}{(2\pi)^2}\right) = a_0 \exp\left(-\alpha(\omega-\omega_0)^2\right), \text{ где } \alpha = \frac{2T_0^2}{(2\pi)^2}$$

$$\xi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega)\exp[i(\omega t - Kx)]\,d\omega = \left\{ K(\omega) = K_0 + \frac{1}{V_{гр}}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial\omega^2}\Big|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^2 \right\} =$$

$$= a_0 \exp[i(\omega_0 t - K_0 x)] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp-\left[(\omega-\omega_0)^2(\alpha + i\beta t) - i(\omega-\omega_0)\left(t - \frac{1}{V_{гр}}x\right)\right] d\omega =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} \gamma &= \alpha + i\beta t \\ \xi &= t - \frac{1}{V_{гр}}x \end{aligned},\ \omega_1 = \omega - \omega_0,\ \text{дополнив до полн. квадрата показат. экс.} \right\} =$$

$$= a_0 \exp\left[i(\omega_0 t - k_0 x) - \frac{\xi^2}{4\gamma}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp-\left[\omega_1\sqrt{\gamma} + \frac{i\xi}{2\sqrt{\gamma}}\right]^2 d\omega_1 = a_0\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\exp\left[-\frac{\xi^2}{4\gamma} + i(\omega_0 t - k_0 x)\right]$$

$$\xi(x,t) = a_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + i\beta t}} \exp\left[- \frac{\left(t - \frac{1}{V_{гр}} x\right)^2}{4(\alpha + i\beta t)} + i(\omega_0 t - K_0 x)\right]$$

где $\alpha = \frac{2\tau_0^2}{(2\pi)^2}$, $\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\Big|_{\omega_0}$

$$|A(x,t)|^2 = \frac{\pi a_0^2}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta t)^2}} \exp\left[- \frac{\alpha \left(t - \frac{1}{V_{гр}} x\right)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}\right]$$

Квадрат модуля определяет характер зависимости компл. амплитуды
Из данного выражения видно, что интенсивность волны при фикс. t имеет вид кривой Гаусса, а её ширина ℓ растет со временем:

$$\ell = \sqrt{\frac{2(\alpha^2 + \beta^2 t)}{\alpha}}$$

А высота убывает за счет множителя $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^2}}$

Из-за этого волновой пакет расплывается. Расплывание происходит симметричным образом, в сторону $t = +\infty$ и $t = -\infty$.

3 Форма пакета

$\exists x = 0$

$$\xi(0,t) = a_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(- \frac{2(\omega - \omega_0)^2 \tau_0^2}{(2\pi)^2}\right) \exp(i\omega t)\, d\omega =$$

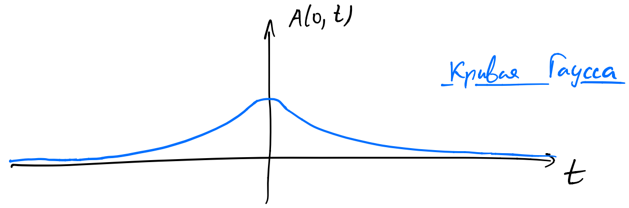
$$= \left\{ \Delta\omega = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{\tau_0} \right\} = a_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -\left[\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2 + i\omega t\right] d\omega =$$

$$= \left\{ \xi = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} + i \frac{\Delta\omega t}{2} \right\} = a_0 \Delta\omega\, e^{-it\omega_0} e^{-\frac{\Delta\omega^2 t^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi =$$

$$= a_0 \frac{\sqrt{2}\,(\pi)^{\frac{3}{2}}}{\tau_0} \exp\left[\frac{\pi^2 t^2}{2\tau_0^2} + i\omega_0 t\right]$$

$$A(0,t) = \left\{ \xi(x,t) = A(x,t)\exp\left[i(\omega_0 t - k_0 x)\right] \right\} = \frac{\xi(0,t)}{\exp\left[i\omega_0 t\right]} \circeq$$

$$\circeq a_0 \frac{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}}{\tau_0} \exp\left[-\frac{\pi^2 t^2}{2\tau_0^2}\right]$$



$\boxed{2}$ Найти распределение интенсивности.

Из 1-го пункта решения была получена формула:

$$|A(x,t)|^2 = \frac{\pi a_0^2}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta t)^2}} \exp\left[-\frac{\alpha\left(t - \frac{1}{V_{гр}}x\right)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}\right]$$

Если обозначить $\eta = t - \frac{x}{V_{гр}}$, то $t = \eta + \frac{x}{V_{гр}}$

и формула интенсивности примет вид:

$$I(\eta) = \frac{\frac{1}{8} c a_0^2}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta t)^2}} \exp\left[-\frac{\alpha \eta^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}\right], \text{ где } \eta = t - \frac{x}{V_{гр}}, \quad t = \eta + \frac{x}{V_{гр}}$$

$\boxed{4}$ Вычислить энергию волнового пакета.

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\eta)\, d\eta = \frac{1}{8} c a_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\, e^{-\frac{\alpha\eta^2}{2\xi^2}}\, d\eta, \text{ где}$$

$$\xi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2\left(\eta + \frac{x}{V_{гр}}\right)^2}$$